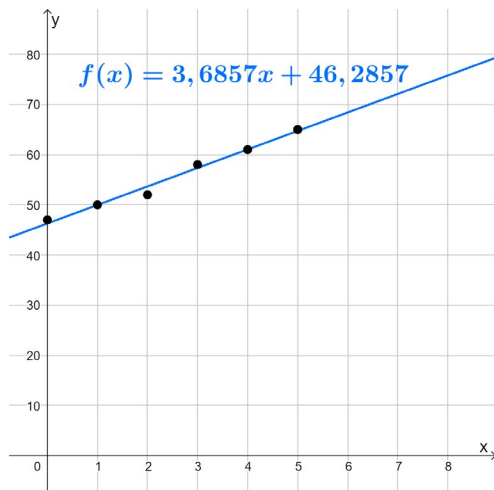


11.1

- a) Muuttuja x on vuodesta 2013 kulunut aika vuosina ja muuttuja y internetistä musiikkia kuunnelleiden tai ladanneiden osuus prosentteina. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon lineaarinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (v)	Musiikin kuuntelu tai lataaminen internetistä y (%)
2	0	47
3	1	50
4	2	52
5	3	58
6	4	61
7	5	65

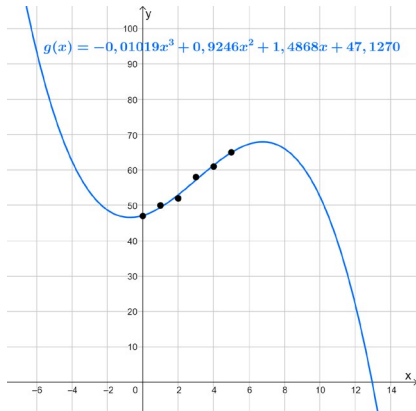


Internetistä musiikkia kuuntelevien tai lataavien osuutta suomalaisista kuvaava lineaarinen malli neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on

$$f(x) = 3,6857x + 46,2857,$$

missä x on vuodesta 2013 kulunut aika vuosina.

Sovitetaan pistejoukkoon kolmannen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.



Internetistä musiikkia kuuntelevien tai lataavien osuutta suomalaisista kuvaava kolmannen asteen polynomi neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on

$$g(x) = -0,01019x^3 + 0,9246x^2 + 1,4868x + 47,1270,$$

missä x on vuodesta 2013 kulunut aika vuosina.

- b)** Vuodesta 2013 vuoteen 2019 aikaa on kulunut $2019 - 2013 = 6$ vuotta. Lasketaan funktioiden f ja g arvot, kun $x = 6$ (v).

$$f(6) = 3,6857 \cdot 6 + 46,2857$$

$$\approx 68 \text{ (\%)}$$

$$g(6) = -0,01019 \cdot 6^3 + 0,9246 \cdot 6^2 + 1,4868 \cdot 6 + 47,1270$$

$$\approx 67 \text{ (\%)}$$

Lineaarisen mallin antama ennuste 68 % on lähempänä todellista arvoa 69 % kuin toisen asteen polynomifunktion antama ennuste 67 %.

Tässä kyseisessä tilanteessa lineaarinen malli antaa paremman ennusteen internetistä musiikkia kuuntelevien tai lataavien suomalaisten osuudelle kuin kolmannen asteen polynomifunktio.

Vastaus

a) $f(x) = 3,6857x + 46,2857$,

$$g(x) = -0,01019x^3 + 0,9246x^2 + 1,4868x + 47,1270$$

- b)** lineaarinen malli

11.2

- a) Taulukoidaan mittaustulokset ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	0	2
3	2	6
4	4	10
5	6	12
6	8	11

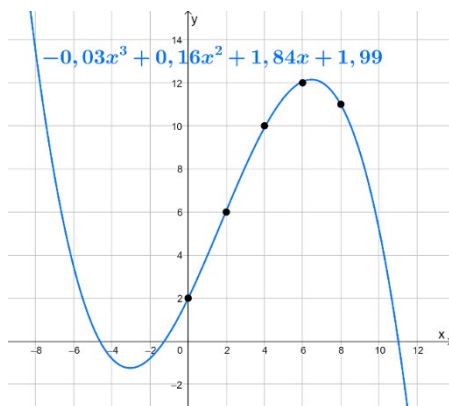
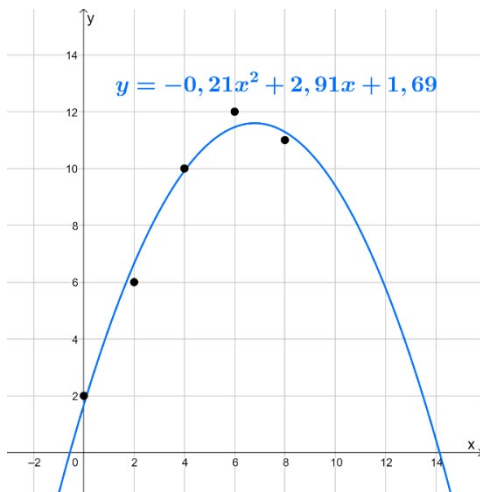
Mittaustuloksiin sovitettu toisen asteen polynomi kahden desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on

$$y = -0,21x^2 + 2,91x + 1,69.$$

Sovitetaan pistejoukkoon kolmannen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

Mittaustuloksiin sovitettu kolmannen asteen polynomi kahden desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on

$$y = -0,03x^3 + 0,16x^2 + 1,84x + 1,99.$$



Vastaus

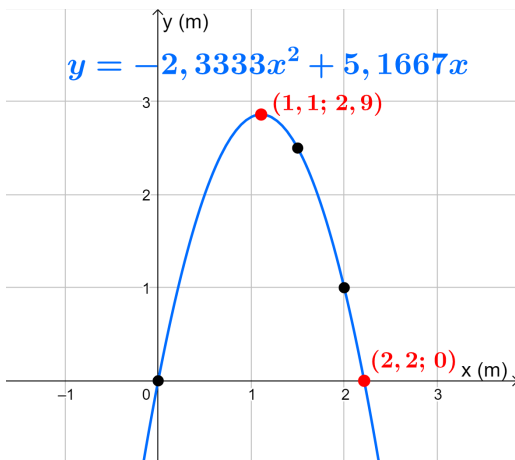
- a) $y = -0,21x^2 + 2,91x + 1,69$
b) $y = -0,03x^3 + 0,16x^2 + 1,84x + 1,99$

11.3

- a) Sijoitetaan vesisuihku koordinaatistoon niin, että se lähtee pisteestä $(0, 0)$. Tällöin vesisuihku kulkee myös pisteiden $(1,5; 2,5)$ ja $(2,0; 1,0)$ kautta.

Paraabeli on toisen asteen polynomifunktion kuvaaja. Taulukoidaan pisteet ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	0	0
3	1,5	2,5
4	2,0	1,0



Vesisuihkuja kuvaavan paraabelin yhtälö neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on $y = -2,3333x^2 + 5,1667x$, missä y on vesisuihkun korkeus ja x etäisyys lähtöpisteestä metreinä.

- b) Vesisuihku osuu veden pintaan paraabelin ja x -akselin leikkauspisteessä. Leikkauspisteen y -koordinaatti on 0. Lasketaan leikkauspisteen x -koordinaatti.

$$y = -2,3333x^2 + 5,1667x$$

$$0 = -2,3333x^2 + 5,1667x$$

$$(x = 0) \text{ tai } x \approx 2,2146 \text{ (m)}$$

Sijoitetaan $y = 0$.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Vesisuihku siis osuu veden pintaan $2,2146 \approx 2,2$ metrin päässä lähtöpisteestä.

c) Vesisuihkun korkein kohta on paraabelin huipussa.

Paraabelin huippu sijaitsee x -akselin leikkauskohtien puolivälissä. Lasketaan huipun x -koordinaatti.

$$x = \frac{0 + 2,2146}{2} \approx 1,1$$

Lasketaan huipun y -koordinaatti.

$$\begin{aligned} y &= -2,3333x^2 + 5,1667x && \text{Sijoitetaan } x = 1,1. \\ &= -2,3333 \cdot 1,1^2 + 5,1667 \cdot 1,1 \\ &\approx 2,9 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Vesisuihku kävi 2,9 metrin korkeudella.

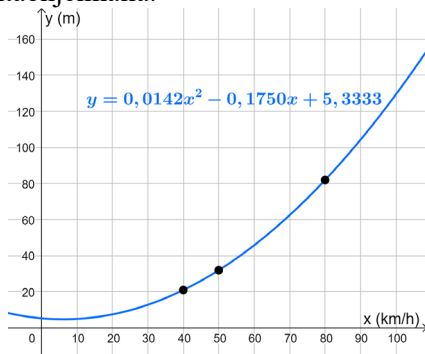
Vastaus

- a) $y = -2,3333x^2 + 5,1667x$, kun vesisuihku lähtee pisteestä $(0, 0)$
- b) 2,2 m
- c) 2,9 m

11.4

- a) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Nopeus x (km/h)	Jarrutus- matka y (m)
2	40	21
3	50	32
4	80	82



Jarrutusmatkaa kuvaavan paraabelin yhtälö neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on $y = 0,0142x^2 - 0,1750x + 5,3333$, missä y on auton nopeus (km/h) ja x jarrutusmatka metreinä.

- b) Lasketaan jarrutusmatka y , kun nopeus $x = 70$ km/h.

$$\begin{aligned}
 y &= 0,0142x^2 - 0,1750x + 5,3333 && \text{Sijoitetaan } x = 70. \\
 &= 0,0142 \cdot 70^2 - 0,1750 \cdot 70 + 5,3333 \\
 &\approx 63 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

Jarrutusmatka on 63 metriä.

- c) Ratkaistaan nopeus x , kun jarrutusmatka $y = 100$ m.

$$\begin{aligned}
 y &= 0,0142x^2 - 0,1750x + 5,3333 && \text{Sijoitetaan } y = 100. \\
 100 &= 0,0142x^2 - 0,1750x + 5,3333 && \text{Ratkaistaan} \\
 &&& \text{CAS-laskimella.}
 \end{aligned}$$

$$x \approx -76 \text{ tai } x \approx 88$$

Auton nopeus on positiivinen luku. Jarrutusmatka on 100 m ajettaessa nopeudella 88 km/h.

Vastaus

- a) $y = 0,0142x^2 - 0,1750x + 5,3333$
 b) 63 m
 c) 88 km/h

11.5

- a) Vuonna 2019 on vuodesta 2013 kulunut $2019 - 2013 = 6$ vuotta. Lasketaan funktioiden f ja g arvot, kun $x = 6$ (v).

$$\begin{aligned} f(6) &= -1,17 \cdot 6^2 + 16,14 \cdot 6 + 32,23 \\ &\approx 87 \text{ (\%)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(6) &= 0,4 \cdot 6^3 - 4,17 \cdot 6^2 + 21,23 \cdot 6 + 32 \\ &\approx 96 \text{ (\%)} \end{aligned}$$

Vuonna 2019 tilausvideopalveluita käytti mallin f mukaan 87 % ja mallin g mukaan 96 % 16–24-vuotiaista.

- b) Mallin f antama ennuste 87 % on lähempänä todellista arvoa 86 % kuin mallin g antama ennuste 96 %.

Vastaus

- a) malli f : 87 %, malli g : 96 %
b) malli f

11.6

- a) Tammikuun lopusta joulukuun loppuun kuluu aikaa 11 kk. Vuoden 2020 joulukuun loppuun on vuoden 2018 tammikuun alusta kulunut aikaa $2 \cdot 12 + 11 = 35$ kuukautta. Lasketaan funktioiden f ja g arvot, kun $x = 35$ (kk).

$$\begin{aligned} f(35) &= 0,12 \cdot 35^2 + 17,34 \cdot 35 + 57,74 \\ &\approx 812 \text{ (miljoonaa käyttäjää)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(35) &= 0,01 \cdot 35^3 - 0,35 \cdot 35^2 + 22,25 \cdot 35 + 55 \\ &\approx 834 \text{ (miljoonaa käyttäjää)} \end{aligned}$$

Käyttäjiä on mallin f mukaan 812 miljoonaa ja mallin g mukaan 834 miljoonaa.

- b) Ratkaistaan millä muuttujan arvolla x funktioiden f ja g arvo on 1000 (miljoonaa).

$$f(x) = 1000$$

Sijoitetaan polynomin $f(x)$ lauseke.

$$0,12x^2 + 17,34x + 57,74 = 1000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 42 \text{ (kk)}$$

$$g(x) = 1000$$

Sijoitetaan polynomin $g(x)$ lauseke.

$$0,01x^3 - 0,35x^2 + 22,25x + 55 = 1000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 39 \text{ (kk)}$$

Mallin g antama ennuste 39 kk on pienempi kuin mallin f antama ennuste 42 kk. Sovellus siis saavuttaa miljardi käyttäjää nopeammin mallin g mukaan.

Mallin g mukaan miljardin käyttäjän raja saavutetaan, kun vuoden 2018 tammikuun lopusta on kulunut 39 kuukautta.

$$39 \text{ kk} = 3 \cdot 12 \text{ kk} + 3 \text{ kk} = 3 \text{ v} + 3 \text{ kk}$$

Sovellus siis saavuttaa miljardi käyttäjää vuoden 2021 huhtikuun lopussa.

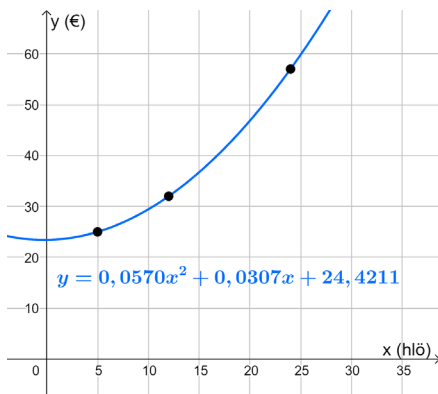
Vastaus

- a)** malli f : 812 miljoonaa,
malli g : 834 miljoonaa
- b)** mallin g mukaan, huhtikuussa 2021

11.7

- a) Muuttuja x on kakun koko (henkilöä) ja muuttuja y kakun hinta euroina. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Koko x (hlö)	Hinta y (€)
2	5	25
3	12	32
4	24	57



Mansikkakakun hintaa (€) kuvaava toisen asteen polynomi neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on

$$f(x) = 0,0570x^2 + 0,0307x + 23,4211,$$

missä x on kakun koko.

- b) Ratkaistaan funktion arvo, kun kyseessä on 18 hengen kakku, eli kakun koko $x = 18$.

$$f(18) = 0,0570 \cdot 18^2 + 0,0307 \cdot 18 + 23,4211$$
$$x \approx 42 \text{ (€)}$$

18 henkilön kakku maksaa 42 €.

Vastaus

- a) $f(x) = 0,0570x^2 + 0,0307x + 23,4211$
b) 42 €

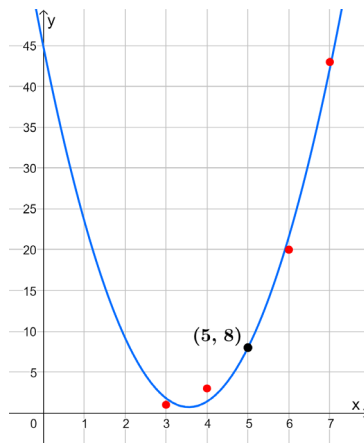
11.8

Paraabeli on toisen asteen polynomifunktion kuvaaja.

- a) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	3	1
3	4	3
4	5	8
5	6	20
6	7	43

Kuvaajasta nähdään selvästi, ettei paraabeli kulje kaikkien pisteiden kautta.



Ei siis ole olemassa paraabelia, joka kulkee kaikkien annettujen pisteiden kautta.

- b) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	3	1
3	4	3
4	5	9
5	6	19
6	7	33

Kuvaajan perusteella näyttää, että paraabeli kulkee kaikkien pisteiden kautta. Tällöin paraabelin yhtälö on $y = 2x^2 - 12x + 19$.

Paraabeli kulkee pisteen kautta täsmälleen silloin, kun pisteen koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön. Tarkistetaan laskemalla, kulkeeko paraabeli kaikkien annettujen pisteiden kautta.

$$1 = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 19$$

$$1 = 1$$

tosi

$$3 = 2 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 19$$

$$3 = 3$$

tosi

$$9 = 2 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 + 19$$

$$9 = 9$$

tosi

$$19 = 2 \cdot 6^2 - 12 \cdot 6 + 19$$

$$19 = 19$$

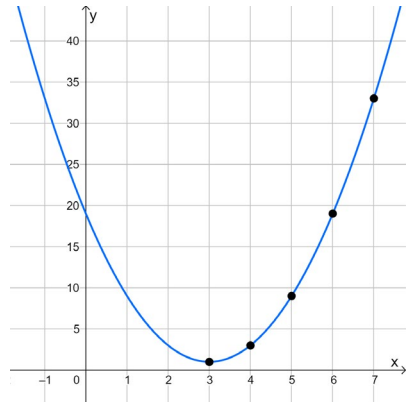
tosi

$$33 = 2 \cdot 7^2 - 12 \cdot 7 + 19$$

$$33 = 33$$

tosi

Kaikkien pisteiden koordinaatit toteuttavat paraabeli yhtälön. On siis olemassa paraabeli, joka kulkee kaikkien annettujen pisteiden kautta.



$$x = 3, y = 1$$

$$x = 4, y = 3$$

$$x = 5, y = 9$$

$$x = 6, y = 19$$

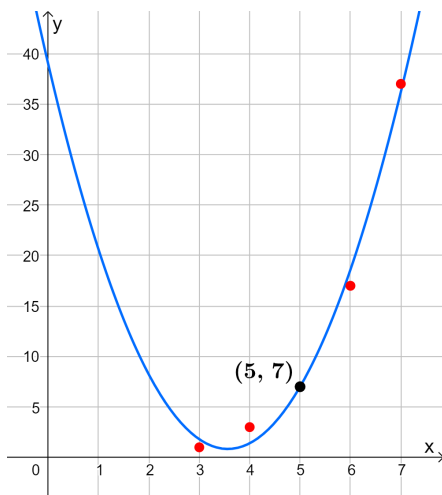
$$x = 7, y = 33$$

- c) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	3	1
3	4	3
4	5	7
5	6	17
6	7	37

Kuvaajasta nähdään selvästi, ettei paraabeli kulje kaikkien pisteiden kautta.

Ei siis ole olemassa paraabelia, joka kulkee kaikkien annettujen pisteiden kautta.



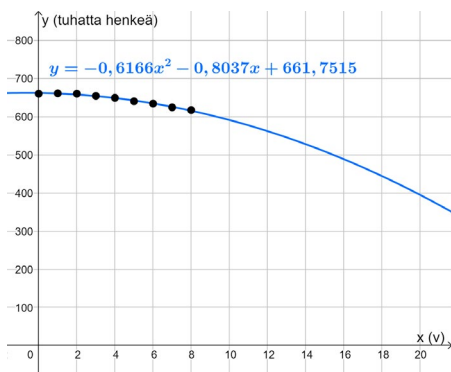
Vastaus

- a) ei ole
- b) on
- c) ei ole

11.9

- a) Muuttuja x on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina ja muuttuja y 15 – 24-vuotiaiden lukumäärä (tuhatta henkeä). Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomi taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (v)	15 – 24- vuotiaiden lukumäärä y (tuhatta henkeä)
2	0	660
3	1	661
4	2	660
5	3	654
6	4	649
7	5	640
8	6	634
9	7	624
10	8	617

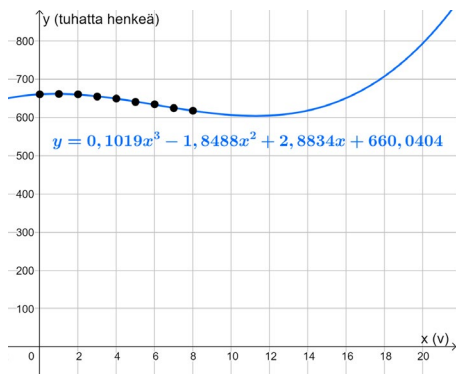


15 – 24-vuotiaiden henkilöiden lukumäärää tuhansina kuvaava toisen asteen polynomi neljän desimaalin tarkkuuteen sovitetuna on

$$f(x) = -0,6266x^2 - 0,8037x + 661,7515,$$

missä x on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina.

Sovitetaan pistejoukkoon kolmannen asteen polynomi taulukkolaskentaohjelmalla.



15 – 24-vuotiaiden henkilöiden lukumäärää tuhansina kuvaava kolmannen asteen polynomi neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on

$$g(x) = 0,1019x^3 - 1,8488x^2 + 2,8834x + 660,0404,$$

missä x on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina.

- b)** Vuodesta 2010 vuoteen 2019 aikaa on kulunut $2019 - 2010 = 9$ vuotta. Lasketaan funktioiden f ja g arvot, kun $x = 9$ (v).

$$f(9) = -0,6266 \cdot 9^2 - 0,8037 \cdot 9 + 661,7515$$

$$\approx 604 \text{ (tuhatta henkeä)}$$

$$g(9) = 0,1019 \cdot 9^3 - 1,8488 \cdot 9^2 + 2,8834 \cdot 9 + 660,0404$$

$$\approx 611 \text{ (tuhatta henkeä)}$$

Kolmannen asteen polynomifunktion antama ennuste noin 611 000 henkeä on lähempänä todellista arvoa 611 000, kuin toisen asteen polynomifunktion antama ennuste 604 000 henkeä.

Tässä kyseisessä tilanteessa kolmannen asteen polynomifunktio antaa paremman ennusteen Suomessa asuvien 16 – 24-vuotiaiden lukumäärästä kuin toisen asteen polynomifunktio.

Vastaus

a) $f(x) = -0,6266x^2 - 0,8037x + 661,7515$

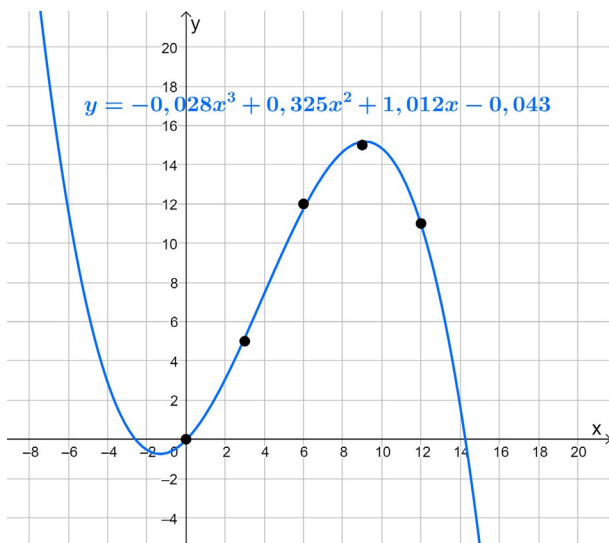
$$g(x) = 0,1019x^3 - 1,8488x^2 + 2,8834x + 660,0404$$

b) kolmannen asteen polynomi $g(x)$

11.10

- a) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon kolmannen asteen polynomi taulukkolaskentaohjelmalla.

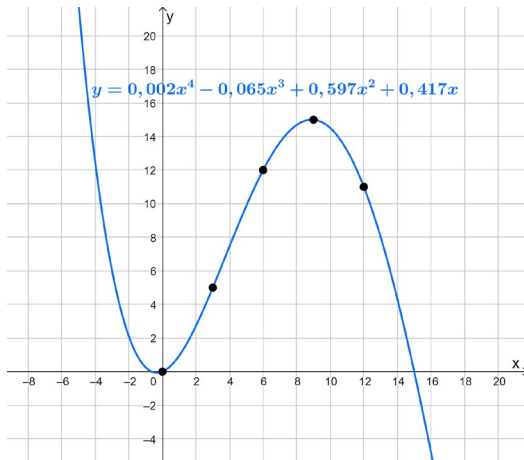
	A	B
1	x	y
2	0	0
3	3	5
4	6	12
5	9	15
6	12	11



Mittaustuloksia kuvaava kolmannen asteen polynomi kolmen desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on

$$y = -0,028x^3 + 0,325x^2 + 1,012x - 0,043.$$

- b) Sovitetaan samaan pistejoukkoon neljännen asteen polynomi taulukkolaskentaohjelmalla.



Mittautuloksia kuvaava neljännen asteen polynomi kolmen desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on

$$y = 0,002x^4 - 0,065x^3 + 0,597x^2 + 0,417x.$$

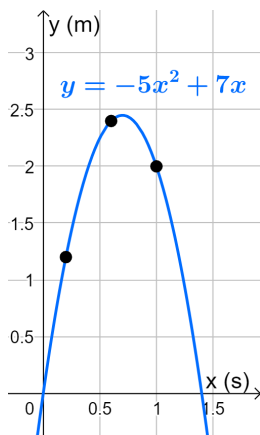
Vastaus

- a) $y = -0,028x^3 + 0,325x^2 + 1,012x - 0,043$
b) $y = 0,002x^4 - 0,065x^3 + 0,597x^2 + 0,417x$

11.11

- a) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (s)	Korkeus y (m)
2	0,2	1,2
3	0,6	2,4
4	1,0	2



Mittaustuloksiin sovitettu toisen asteen polynomi on

$$f(x) = -5x^2 + 7x.$$

- b) Ratkaistaan millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on 60 (s).

$$f(x) = 0,6$$

$$-5x^2 + 7x = 0,6$$

$$x \approx 0,09 \quad \text{tai} \quad x \approx 1,3$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = -5x^2 + 7x.$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Ratkaisuista suurempi arvo on se ajanhetki, jolla pallo on 60 senttimetriä heittokohdan yläpuolella tulossa alaspäin. Pallo on ollut ilmassa 1,3 sekuntia.

Vastaus

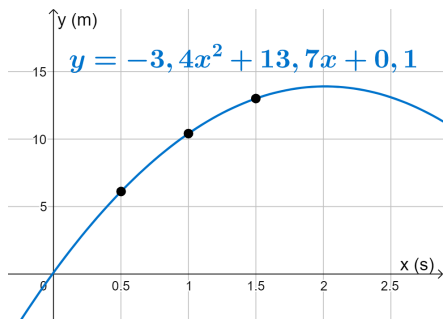
a) $f(x) = -5x^2 + 7x$

b) 1,3 s

11.12

- a) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (s)	Edetty matka y (m)
2	0,5	6,1
3	1,0	10,4
4	1,5	13,0



Jarrutuksen aikana edettyä matkaa kuvaava toisen asteen polynomi on $y = -3,4x^2 + 13,7x + 0,1$, missä y on jarrutuksen aikana edetty matka metreinä ja x kulunut aika sekunteina.

- b) Lasketaan edetty matka y , kun kulunut aika $x = 2,0$ s.

$$\begin{aligned}
 y &= -3,4x^2 + 13,7x + 0,1 && \text{Sijoitetaan } x = 2,0. \\
 &= -3,4 \cdot 2,0^2 + 13,7 \cdot 2,0 + 0,1 \\
 &= 13,9 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

Auto eteni jarrutuksen aikana 13,9 metriä.

- c) Ratkaistaan aika x , kun edetty matka $y = 12$ m.

$$\begin{aligned}
 y &= -3,4x^2 + 13,7x + 0,1 && \text{Sijoitetaan } y = 12. \\
 12 &= -3,4x^2 + 13,7x + 0,1 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\
 x &\approx 1,3 \text{ (s)} \text{ tai } x \approx 2,8 \text{ (s)}
 \end{aligned}$$

Jarrutuksen aikana edettiin 12 m 1,3 sekunnissa ennen kuin auto pysähtyi. Paraabelin huippu kuvaa hetkeä, jolloin auto pysähtyy.

Vastaus

- a) $y = -3,4x^2 + 13,7x + 0,1$ b) 13,9 m c) 1,3 s

11.13

- a) Sijoitetaan tunnelin poikkileikkaus koordinaatistoon niin, että sen vasen alakulma on pisteessä $(0, 0)$. Tällöin poikkileikkauksen oikea alakulma on pisteessä $(7, 0; 0)$. Tunnelin korkein kohta on paraabelin huipussa. Paraabelin huippu sijaitsee x -akselin leikkauskohtien puolivälissä.

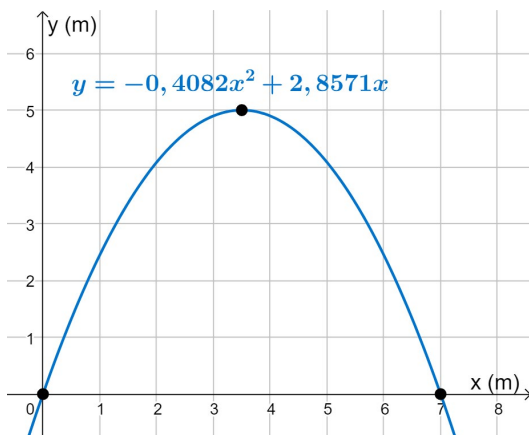
Lasketaan huipun x -koordinaatti.

$$x = \frac{0 + 7,00}{2} = 3,50$$

Tunnelin korkeus on 5 metriä. Huipun y -koordinaatti on siis 5,00. Paraabeli kulkee siis myös pisteen $(3,50; 5,00)$ kautta.

Paraabeli on toisen asteen polynomifunktion kuvaaja. Taulukoidaan pisteet ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	0,00	0,00
3	3,50	5,00
4	7,00	0,00



Tunnelin poikkileikkausta kuvaavan paraabelin yhtälö neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on $y = -0,4082x^2 + 2,8571x$, missä y on tunnelin korkeus ja x etäisyys tunnelin vasemmasta alakulmasta metreinä.

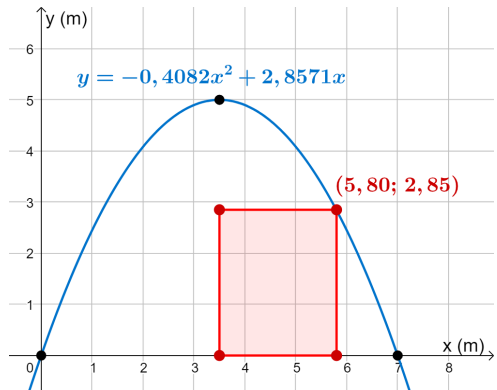
- b) Kun matkailuauton vasen kylki on keskiviivalla, on sen oikea sivu 2,30 m paraabelin huipusta oikealle, kohdassa $x = 3,50 + 2,30 = 5,80$ (m).

Lasketaan korkeus y , kun etäisyys $x = 5,80$ m.

$$\begin{aligned}y &= -0,4082x^2 + 2,8571x \\&= -0,4082 \cdot 5,80^2 + 2,8571 \cdot 5,80 \\&\approx 2,84 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 5,80$.

Tunnelin korkeus matkailuauton oikean kyljen kohdalla on 2,84 metriä, ja matkailuauton korkeus 2,85 metriä. Auto ei siis mahdu ajamaan tunnelista keskiviivan oikealla puolella.



Vastaus

- a) $y = -0,4082x^2 + 2,8571x$, kun tunnelin vasen alakulma on pisteessä $(0, 0)$.
b) ei mahdu

11.14

- a) Lasketaan funktioiden f ja g arvot, kun vuodesta 1981 kulunut aika on $2010 - 1981 = 29$ vuotta.

$$\begin{aligned} f(29) &= -0,053 \cdot 29^2 + 1,953 \cdot 29 + 58,665 \\ &\approx 71 \text{ (\%)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(29) &= -0,001 \cdot 29^3 - 0,022 \cdot 29^2 + 1,581 \cdot 29 + 59 \\ &\approx 62 \text{ (\%)} \end{aligned}$$

Mallin f antaman ennusteen mukaan 71 % ja mallin g antaman ennusteen mukaan 62 % suomalaisista on katsonut televisiota päivittäin.

- b) Ratkaistaan muuttujan x arvo, kun funktion f arvo on 0 (%).

$$f(x) = 0$$

Sijoitetaan funktion $f(x)$ lauseke.

$$\begin{aligned} -0,053x^2 + 1,953x + 58,665 &= 0 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x \approx -20 \text{ tai } x \approx 56 \end{aligned}$$

Kulunut aika on positiivinen luku eli $x \approx 56$. Mallin f antaman ennusteen mukaan televisiota päivittäin katsovien suomalaisten prosenttiosuus tippuu nolnaan, kun vuodesta 1981 on kulunut 56 vuotta, eli vuonna $1981 + 56 = 2037$. Suomalaiset eivät siis enää katso televisiota päivittäin vuodesta 2038 alkaen.

Ratkaistaan muuttujan x arvo, kun funktion g arvo on 0 (%).

$$g(x) = 0$$

Sijoitetaan funktion
 $g(x)$ lauseke.

$$-0,001x^3 - 0,022x^2 + 1,581x + 59 = 0$$

Ratkaistaan
 CAS-laskimella.

$$x \approx 44 \text{ (v)}$$

Mallin g antaman ennusteen mukaan televisiota päivittäin katsovien suomalaisten prosenttiosuus tippuu nolnaan, kun vuodesta 1981 on kulunut 44 vuotta, eli vuonna $1981 + 44 = 2025$. Suomalaiset eivät siis enää katso televisiota päivittäin vuodesta 2026 alkaen.

Vastaus

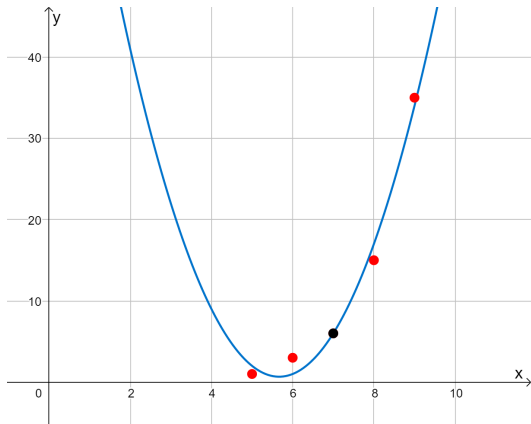
- a) malli f : 71 %, malli g : 62 %
- b) malli f : vuodesta 2038 alkaen
 malli g : vuodesta 2026 alkaen

11.15

Paraabeli on toisen asteen polynomifunktion kuvaaja.

- a) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	5	1
3	6	3
4	7	6
5	8	15
6	9	35

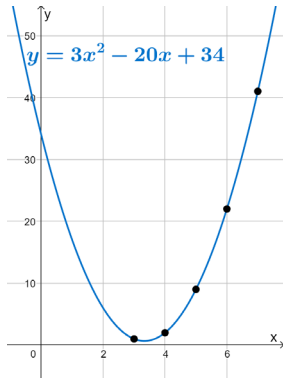


Kuvaajasta nähdään selvästi, ettei paraabeli kulje kaikkien pisteiden kautta.

Ei siis ole olemassa paraabelia, joka kulkee kaikkien annettujen pisteiden kautta.

- b) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	3	1
3	4	2
4	5	9
5	6	22
6	7	41



Kuvaajan perusteella näyttää, että paraabeli kulkee kaikkien pisteiden kautta. Tällöin paraabelin yhtälö on $y = 3x^2 - 20x + 34$.

Paraabeli kulkee pisteen kautta täsmälleen silloin, kun pisteen koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön. Tarkistetaan laskemalla, kulkeeko paraabeli kaikkien annettujen pisteiden kautta.

$$1 = 3 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3 + 34$$

$$x = 3, y = 1$$

$$1 = 1$$

tosi

$$2 = 3 \cdot 4^2 - 20 \cdot 4 + 34$$

$$x = 4, y = 2$$

$$2 = 2$$

tosi

$$9 = 3 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 34$$

$$x = 5, y = 9$$

$$9 = 9$$

tosi

$$22 = 3 \cdot 6^2 - 20 \cdot 6 + 34$$

$$x = 6, y = 22$$

$$22 = 22$$

tosi

$$41 = 3 \cdot 7^2 - 20 \cdot 7 + 34$$

$$x = 7, y = 41$$

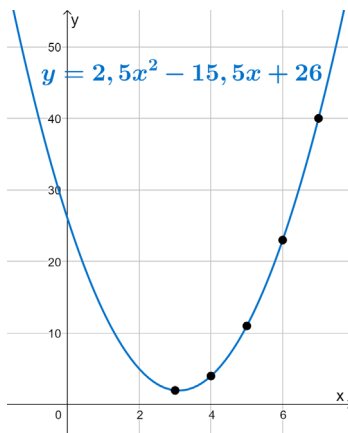
$$41 = 41$$

tosi

Kaikkien pisteiden koordinaatit toteuttavat paraabeli yhtälön. On siis olemassa paraabeli, joka kulkee kaikkien annettujen pisteiden kautta.

- c) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	3	2
3	4	4
4	5	11
5	6	23
6	7	40



Kuvaajan perusteella näyttää, että paraabeli kulkee kaikkien pisteiden kautta. Tällöin paraabelin yhtälö on $y = 2,5x^2 - 15,5x + 26$.

Paraabeli kulkee pisteen kautta täsmälleen silloin, kun pisteen koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön. Tarkistetaan laskemalla, kulkeeko paraabeli kaikkien annettujen pisteiden kautta.

$$2 = 2,5 \cdot 3^2 - 15,5 \cdot 3 + 26$$

$$x = 3, y = 2$$

$$2 = 2$$

tosi

$$4 = 2,5 \cdot 4^2 - 15,5 \cdot 4 + 26$$

$$x = 4, y = 4$$

$$4 = 4$$

tosi

$$11 = 2,5 \cdot 5^2 - 15,5 \cdot 5 + 26$$

$$x = 5, y = 11$$

$$11 = 11$$

tosi

$$23 = 2,5 \cdot 6^2 - 15,5 \cdot 6 + 26$$

$$x = 6, y = 23$$

$$23 = 23$$

tosi

$$40 = 2,5 \cdot 7^2 - 15,5 \cdot 7 + 26$$

$$x = 7, y = 40$$

$$40 = 40$$

tosi

Kaikkien pisteiden koordinaatit toteuttavat paraabeli yhtälön. On siis olemassa paraabeli, joka kulkee kaikkien annettujen pisteiden kautta.

Vastaus

- a) ei ole
- b) on
- c) on

11.16

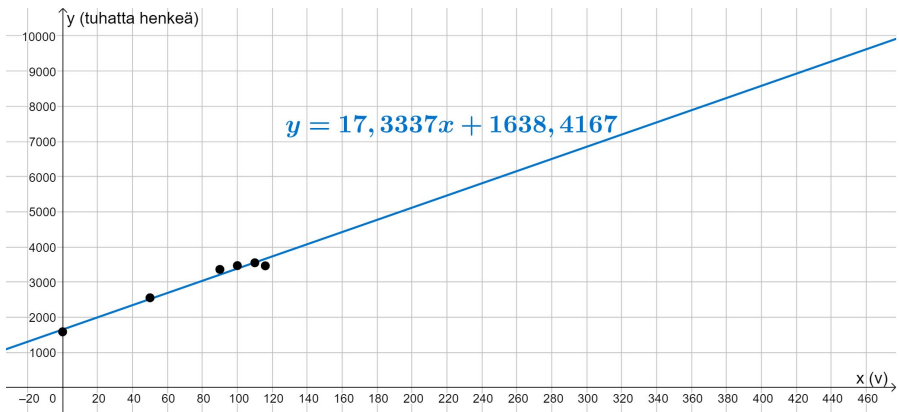
Lasketaan aineiston avulla 15 – 64 -vuotiaiden asukkaiden lukumäärät annettuina vuosina.

Vuosi	15 – 64 - vuotiaiden osuus (%)	Väkiluku	15 – 64 -vuotiaiden asukkaiden lukumäärä (tuhatta henkeä)
1900	59,6	2656	$0,596 \cdot 2656 \approx 1583$
1950	63,3	4030	$0,633 \cdot 4030 \approx 2551$
1990	67,2	4998	$0,672 \cdot 4998 \approx 3359$
2000	66,9	5181	$0,669 \cdot 5181 \approx 3466$
2010	66,0	5375	$0,660 \cdot 5375 \approx 3548$
2016	62,9	5503	$0,629 \cdot 5503 \approx 3461$

Muuttuja x on vuodesta 1900 kulunut aika vuosina ja muuttuja y 15 – 64 -vuotiaiden asukkaiden lukumäärä tuhansina. Taulukoidaan havaintoarvot.

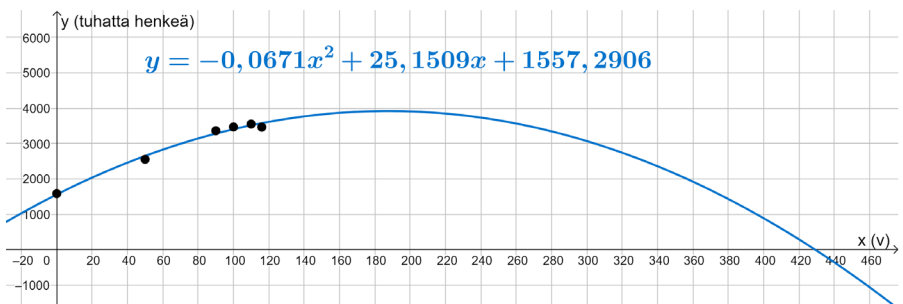
	A	B
1	Kulunut aika x (v)	Asukkaiden lukumäärä y (tuhatta)
2	0	1583
3	50	2551
4	90	3359
5	100	3466
6	110	3548
7	116	3461

Sovitetaan pistejoukkoon lineaarinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.



15 – 64-vuotiaiden asukkaiden lukumäärää tuhansina kuvaava lineaarinen malli neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on $f(x) = 17,3337x + 1648,4167$, missä x on vuodesta 1900 kulunut aika vuosina.

Sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.



15 – 64-vuotiaiden asukkaiden lukumäärää tuhansina kuvaava toisen asteen polynomi neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on $g(x) = -0,0671x^2 + 25,1509x + 1557,2906$, missä x on vuodesta 1900 kulunut aika vuosina.

Vuosi 2035:

Ratkaistaan funktioiden f ja g arvot, kun vuodesta 1900 kulunut aika $x = 2035 - 1900 = 135$ vuotta.

$$\begin{aligned} f(135) &= 17,3337 \cdot 135 + 1648,4167 \\ &\approx 3998 \text{ (tuhatta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(135) &= -0,0671 \cdot 135^2 + 25,1509 \cdot 135 + 1557,2906 \\ &\approx 3730 \text{ (tuhatta)} \end{aligned}$$

15 – 64-vuotiaita on Suomessa vuonna 2035 lineaarisen mallin mukaan 3 998 000 ja toisen asteen mallin mukaan 3 730 000. Molemmat ennusteet ovat mahdolliset.

Vuosi 2350:

Ratkaistaan funktioiden f ja g arvot, kun vuodesta 1900 kulunut aika $x = 2350 - 1900 = 450$ vuotta.

$$\begin{aligned} f(450) &= 17,3337 \cdot 135 + 1648,4167 \\ &\approx 9449 \text{ (tuhatta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(450) &= -0,0671 \cdot 450^2 + 25,1509 \cdot 450 + 1557,2906 \\ &\approx -713 \text{ (tuhatta)} \end{aligned}$$

15 – 64-vuotiaita on Suomessa vuonna 2350 lineaarisen mallin mukaan 9 449 000 ja toisen asteen mallin mukaan –713 000. Lineaarisen mallin ennuste vaikuttaa suurelta. Toisen asteen mallin ennuste on mahdoton, sillä ihmisten lukumäärä ei voi olla negatiivinen.